OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1906. N° 4.

SUR LES SÉRIES LINÉAIRES TRIPLEMENT INFINIES DE COURBES ALGÉBRIQUES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR

T. BONNESEN

Soit F une surface algébrique, $|C|$ une série linéaire simple et complète de courbes algébriques sur cette surface, n le degré de la série, π son genre.

Dans un faisceau de ∞^1 courbes C, un nombre fini (δ) de courbes ont un point double. M. Segre[1] a démontré que le nombre

$$I = \delta - n - 4\pi \tag{1}$$

ne dépend pas du faisceau considéré, qu'il reste par conséquent invariant quelles que soient les transformations birationnelles qu'on fasse subir à la surface. I étant conforme à l'invariant trouvé, en 1871, par M. Zeuthen[2], ce nombre est ordinairement désigné comme l'invariant de Zeuthen-Segre.

Dans un réseau composé de ∞^2 courbes C, un nombre fini, ε, de courbes ont un point de rebroussement. M. Severi[3] a démontré que le nombre

$$p_a = \frac{\varepsilon}{24} - \pi \tag{2}$$

[1] Segre: Intorno ad un carattere delle superficie algebriche. (Atti. Acc. Torino. Vol. XXXI, 1896).

[2] Zeuthen: Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un (Math. Ann., T. IV, 1871).

[3] Severi: Il genere aritmetico ed il genere lineare. (Atti. Acc. Torino. Vol. XXXVII, 1902).

est le même pour tous les réseaux de la surface considérée, et qu'il reste, par suite, invariant par toutes les transformations birationnelles de F: les nombres I, calculés par la formule (1) pour deux surfaces F et F^1 qui se correspondent un à un, ne sont pas absolument égaux, puisque l'introduction d'une courbe exceptionnelle sur F^1, correspondante à un seul point de F, augmente I d'une unité. p_a est le genre arithmétique de la surface; nous verrons dans la suite que ce nombre est susceptible d'une autre définition qui nous permet de vérifier la formule (2) par des considérations différentes de celles de M. Severi. Vu la conformité de cette formule avec l'expression donnée par M. Zeuthen[1] pour le nombre p_a, on devrait, ce nous semble, la désigner comme la formule de Zeuthen-Severi.

Tout réseau de la surface comprend une infinité simple de courbes C à point double; le lieu de ces points doubles est dit la jacobienne C_j du réseau. M. Enriques a démontré[2] que les C_j qui correspondent aux réseaux contenus dans $|C|$ forment une série linéaire contenue dans une série complète $|C_j|$, et que la série complète

$$|\theta| = |C_j - 3C|, \tag{3}$$

dans les cas où elle existe, est indépendante de la série primitive $|C|$. $|\theta|$ est dite la série canonique de la surface; elle est invariante par les transformations birationnelles, et il est facile de démontrer que si F est une surface d'ordre n dans un espace à trois dimensions, $|\theta|$ y est découpée par toutes les surfaces d'ordre $n-4$ qui passent par sa courbe double. Le nombre des courbes θ linéairement indépendantes les unes des autres, constitue le genre géométrique p_g de la surface.

A la série complète $|C|$ se rattache la série adjointe $|C'| = |C+\theta|$, qui est covariante avec $|C|$, et dont les courbes dé-

[1] Loc. cit.

[2] Enriques: Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche. (Atti. Acc. Torino. Vol. XXXVII, 1902).

coupent sur une courbe C la série canonique (de groupes de points); cette série, qui est d'ailleurs ordinairement incomplète, sera d'ordre $2\pi-2$. En désignant par π' le genre de la série adjointe on trouve que le nombre

$$\omega = \pi' - 3(\pi-1) + n \tag{4a}$$

ne dépend pas de la série $|C|$.[1] Ce nombre est un invariant relatif vis-à-vis des transformations birationnelles, l'introduction d'une courbe exceptionnelle le diminuant d'une unité. ω peut aussi s'exprimer par le genre π_j de la série jacobienne

$$\omega = \pi_j - 9(\pi-1). \tag{4b}$$

Dans les cas où la série canonique $|\theta|$ de la surface existe, elle aura pour genre ω, qui coïncide alors avec le genre $p^{(1)}$ (*Kurvengeschlecht*) introduit par M. Noether. Le degré de la série canonique sera de $\omega-1$.

La relation qui existe entre les trois invariants, p_a, I et ω peut s'exprimer par l'équation

$$\omega + I = 12p_a + 9 \tag{5}$$

qui a été établie par M. Noether et dont nous donnerons plus loin une démonstration.

Dans les formules (1) et (2) du résumé qui précède, les nombres des singularités que peuvent présenter les courbes d'une série linéaire à une ou à deux dimensions, se trouvent exprimés par les invariants de la surface et par l'ordre et le degré de la série; la formule (3) exprime, par le réseau donné et par la série canonique de la surface, le lieu géométrique des points doubles appartenant à celles des courbes, comprises dans un réseau, qui peuvent en avoir. La présente étude a été entreprise dans le but de trouver des expressions analogues pour un système de ∞^3 courbes sur la surface. Mes résultats s'accordent pour l'essentiel avec ceux donnés par

[1] Voir la démonstration de M. Enriques dans son mémoire fondamental intitulé Introduzione alla Geometria sopra le Superficie algebriche. (Mém. d. Società italiana delle Scienze (dei XL), (ser. III), t. X, 1896, p. 41).

M. Marino Pannelli dans un mémoire[1] qui a paru après que j'eus terminé, en mai 1905, mes recherches sur le même sujet; mais le travail de M. Pannelli étant daté de février 1905 c'est lui qui a la priorité. On ne trouve pas dans le mémoire de M. Pannelli l'expression invariante de $2\delta - \iota$ (9) qui mériterait cependant d'être remarquée à cause de sa simplicité; la vérification de la formule (5) a également été omise.

1. Sur une surface algébrique, F, donnée dans un espace à p dimensions par les $p-2$ équations suivantes

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_p) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots p-2,$$

une série linéaire à 3 dimensions, $C^{(3)}$, de courbes algébriques C, est découpée par les hyperespaces algébriques

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 = 0$$

où les φ sont des polynômes en $x_1, x_2, \dots x_p$; et les a des paramètres arbitraires. Supposons que ce système de courbes soit simple, de telle sorte que les courbes devant passer par un point arbitraire P de la surface F ne soient pas assujetties par cela même à passer par d'autres points reliés à P; F se transformera birationnellement par les équations

$$x = \frac{\varphi_1}{\varphi_4}, \quad y = \frac{\varphi_2}{\varphi_4}, \quad z = \frac{\varphi_3}{\varphi_4}$$

en une surface F' située dans l'espace à trois dimensions (x, y, z), et la série de courbes considérée se transformera en les courbes d'intersection de F' avec les plans

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$$

Si nous posons le degré de la série $= n$, F' sera d'ordre n.

2. Une courbe C de la série $C^{(3)}$ est complètement déterminée par la condition de passer par trois points arbitraires de la surface, et réciproquement on peut démontrer que cette

[1] Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve, etc. Rend. d. circolo mat. d. Palermo. T. XX, 1905, fasc. 1.

propriété de la série suffit pour la caractériser comme linéaire[1]. Par deux points arbitraires passent une infinité simple de courbes de $C^{(3)}$; mais il y a un nombre infini de „couples neutres“ tels qu'une courbe de $C^{(3)}$ qui passe par l'un de ces points passera nécessairement par l'autre; un couple de points de cette dernière catégorie détermine par conséquent ∞^2 courbes. Nous désignerons le lieu géométrique de ces couples de points sous le nom de la courbe associée de $C^{(3)}$ et nous la représenterons par la notation K. Une expression fonctionnelle de K s'obtient immédiatement à l'aide de la transformation ci-dessus indiquée: la courbe associée à la section plane de F' est évidemment la courbe double D de F', de sorte qu'il y a une correspondance (1, 2) entre D et K, et comme

$$|\theta| = |(n-4)\,C-2\,D|,$$

nous avons:

$$|K| = |(n-4)\,C-\theta|, \tag{6}$$

ou

$$|K| = |(n-1)\,C-C_j|,$$

en désignant par $|K|$ la série linéaire complète qui est déterminée par K et qui se compose des courbes associées à toutes les séries à trois dimensions que comprend la série complète $|C|$.

Nous sommes en mesure de déterminer le genre virtuel de $|K|$, c'est-à-dire le genre d'une courbe arbitraire de la série $|K|$. On sait en effet que la série de courbes $|K'|$ adjointe à $|K|$ découpe sur K la série canonique de groupes de points d'ordre $2P-2$ (P représentant le genre virtuel de K); et puisque nous avons $|K'| = |K+\theta| = |(n-4)\,C|$, et que le nombre des points d'intersection de K et C s'écrit $(n-1)\,(n-2)-2\pi$ (il est le double de celui des points doubles de la section plane de F'), nous obtenons:

$$P-1 = (n-4)\left\{\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}-\pi\right\}. \tag{7}$$

[1] Ceci est vrai pour toute série dont la dimension est supérieure à l'unité.

La courbe double, D, de F' contient un nombre, d, de points triples auxquels correspondent, sur K, des systèmes de trois points doubles formant un triple neutre par rapport à $C^{(3)}$. Nous donnerons plus loin une détermination de ce nombre; il suffit d'ajouter ici que le genre effectif de la courbe associée est de $P - 3d$.

3. Parmi les couples neutres de points, il s'en trouvera quelques-uns dont les deux points coïncident. Il arrive que le nombre de ces coïncidences est infini; dans ce cas les points correspondants formeront sur F' une arête de rebroussement. Mettons qu'il n'y a qu'un nombre fini (ι) de coïncidences; ces coïncidences, qui correspondent aux points pinces situés sur F', peuvent être désignées comme les points pinces de $C^{(3)}$.

Par chaque point pince passent donc ∞^2 courbes qui sont toutes tangentes à K; il doit par conséquent y avoir un faisceau de courbes C pour lesquelles le point pince est un point double (tandis qu'un point arbitraire de F' n'est généralement que le point double d'une seule courbe contenue dans $C^{(3)}$). Il s'ensuit que tout réseau contenu dans $C^{(3)}$ doit contenir une courbe ayant son point double situé dans le point pince, en d'autres termes que toutes les courbes jacobiennes qui correspondent aux réseaux contenus dans $C^{(3)}$ passent par les points pinces de $C^{(3)}$, d'où il résulte que ces points pinces sont des points bases de la série $C_j^{(3)}$ qui se rattache à $C^{(3)}$[1]. Ceci nous suffit pour déterminer ι: le nombre des points d'intersection de deux courbes jacobiennes doit être égal à $\delta + \iota$ puisque tout point de cette catégorie est ou le point double d'une seule courbe du faisceau commun aux deux réseaux respectifs ou le point double de toutes les courbes d'un faisceau. Comme $|C_j| = |3C + \theta|$, nous avons donc

$$\delta + \iota = 3n + 12(\pi - 1) + (\omega - 1)$$

[1] Au cas où $C^{(3)}$ aurait déjà un point base de multiplicité k, ce point serait en même temps le point base de $C_j^{(3)}$ d'ordre $3k - 1$.

en posant $(C, C) = n$[1]; $(C, \theta) = 2(\pi - 1) - n$; et $(\theta, \theta) = \omega - 1$.

En vertu de la formule (1) nous obtenons

$$\iota = 2n - 5 + 8(\pi - 1) + \omega - I \tag{8a}$$

d'où, en posant $I = 2p_a - \omega + 9$,

$$\iota = 2n - 14 + 8(\pi - 1) + 2\omega - 12p_a. \tag{8b}$$

En outre nous trouvons que

$$2\delta - \iota = 36p_a - 4\omega + 40, \tag{9}$$

d'où nous pouvons conclure que:

Dans une série linéaire triplement infinie de courbes sur une surface algébrique, le double nombre des courbes à point double contenues dans un faisceau, moins le nombre des points de la surface qui sont points doubles pour toutes les courbes d'un faisceau, ne dépendra pas de la série considérée et sera relativement invariant vis-à-vis des transformations birationnelles.

4. Dans $C^{(3)}$ il y a une infinité simple de courbes pourvues d'un point de rebroussement; le lieu de ces points peut être désigné sous le nom de courbe cuspidale ou courbe parabolique, C_p, de $C^{(3)}$, cette courbe correspondant en effet à la courbe parabolique sur F'. De plus il se trouve une infinité de courbes à deux points doubles; nous désignerons par la notation C_d le lieu de ces points doubles. Les courbes C_p (ou C_d) qui correspondent à toutes les séries à trois dimensions contenues dans une série complète $|C|$, formeront également une série linéaire.

Il est facile de démontrer que

$$|C_p| = |8C + 4\theta|. \tag{10}$$

En effet la courbe parabolique de F' se trouve découpée par la hessienne (H) de F qui est d'ordre $4(n-2)$, et il suffit

[1] Nous désignerons par la notation (P, Q) le nombre des points d'intersection des courbes P et Q.

d'un simple calcul pour montrer que la hessienne a la courbe double, D, de F' pour courbe triple et que sur trois nappes que présente H il y en a deux qui touchent les deux nappes de F' le long de D, de sorte que nous avons:

$$|C_p| = |4(n-2)C - 8D| = |8C + 4\theta|.$$

On peut d'ailleurs obtenir la formule ci-dessus en s'appuyant sur ce fait que la jacobienne d'un réseau de courbes C_j se compose de C_p et d'une certaine courbe C.

Pour arriver à déterminer l'expression fonctionnelle de C_d nous allons considérer une courbe C à deux points doubles: a et b. Il est clair qu'une jacobienne C_j passant par a, passera nécessairement par b; a et b forment donc un couple neutre par rapport à la série $C_j^{(3)}$. Dans le cas où la courbe considérée présente un rebroussement, c, ce point de rebroussement sera en même temps le point de contact de toutes les jacobiennes passant par c, de sorte que c constitue un couple neutre de points coïncidants par rapport à $C_j^{(3)}$. Par conséquent la courbe associée à $C_j^{(3)}$ se compose de C_d et C_p (celle-ci comptée deux fois). Nous avons donc, en vertu de la formule (6):

$$|C_d + 2C_p| = |(\delta - 4)C_j - \theta|,$$

$C_j^{(3)}$ étant de degré δ. Donc:

$$|C_d| = |(3n + 12\pi - 3I - 16)C + (n + 4\pi - I - 8)\theta|. \quad (11)$$

5. Nous sommes maintenant en mesure de donner la vérification de la formule de Zeuthen-Severi (2). Il s'agit de déterminer le nombre des courbes à rebroussement comprises dans un réseau. Or on voit facilement que les points de rebroussement coïncident avec les points d'intersection de la courbe jacobienne du réseau et la courbe parabolique, C_p, de $C^{(3)}$. De plus ces deux courbes se coupent dans les ι points pinces, puisqu'il y a deux courbes C ayant un point de rebroussement situé en un point pince, qui est par conséquent un point double sur C_p. Nous pouvons donc poser:

$$\varepsilon + 2\iota = (C_p, C_j) = 4n + 40(\pi - 1) + 4(\omega - 1),$$

d'où, en vertu de (2):

$$\varepsilon = 24(\pi + p_a).$$

Cette démonstration suppose que le réseau en question est compris dans une série à trois dimensions. Si tel n'est pas le cas, en d'autres termes si le réseau est complet, la formule pourra néanmoins se dériver de la même manière; on n'a qu'à faire la somme du réseau et d'une courbe arbitraire et on obtient ainsi une série de dimension plus élevée.

6. Dans ce qui précède nous avons exprimé ε et ι par ω et p_a en nous appuyant sur la relation (5):

$$\omega + I = 12 p_a + 9.$$

Nous allons maintenant vérifier cette équation en nous basant, pour ω et I, sur la définition ci-dessus donnée, tandis que nous définirons p_a par les considérations suivantes empruntées à M. Enriques[1].

Dans l'espace à trois dimensions la série canonique $|\theta|$ est découpée sur la surface F' d'ordre n par les surfaces adjointes d'ordre $n-4$; la dimension de $|\theta|$ est par définition $p_g - 1$. Les surfaces adjointes d'ordre $n-4+r$ découpent la série de courbes que voici:

$$\begin{aligned} |(n-4+r)\,C - 2\,D| &= |\{(n-4)\,C - 2\,D\} + (r\,C)| \\ &= |\theta + (r\,C)| = |(r\,C)'| \end{aligned}$$

où nous désignons par C la section plane de F'; par D la courbe double; par $|(r\,C)'|$ la série adjointe à $|(r\,C)|$.

$|(r\,C)'|$ découpe sur une courbe $(r\,C)$ la série canonique qui serait, si elle était complète, de dimension $\Pi - 1$ où

$$\Pi = r\pi + \frac{r(r-1)}{2}\,n - (r-1)$$

[1] Introduzione § 40.

serait le genre de (rC). La série de courbes $|(rC)'|$ serait alors de dimension $\Pi + p_g - 1$. Mais comme la série de points découpée sur (rC) est généralement incomplète, la dimension est d'ordinaire moindre. Nous pouvons la désigner par $\Pi + p - 1$. M. Enriques a montré que le défaut de la série, $p_g - p$, croît avec r jusqu'à ce qu'une certaine valeur limite de r ait été atteinte, et que pour les valeurs supérieures de r il reste constant. Évidemment ce défaut maximum est un invariant; nous verrons dans la suite que c'est un invariant absolu; on le désigne par $p_g - p_a$ où p_a est dit le genre arithmétique (numérique) de la surface.

Nous aurons donc pour des valeurs suffisamment grandes de r la dimension, R_1, de $|(rC)'|$ déterminée par l'équation

$$R_1 = \Pi + p_a - 1.$$

7. Un théorème formulé par M. Castelnuovo[1] peut nous aider à déterminer le nombre des conditions qu'on impose à une surface d'ordre $n - 4 + r$ en exigeant qu'elle passe par la courbe double, D, de F'. Le système de toutes les surfaces d'ordre $n - 4 + r$ découpe sur D une série de groupes de points d'ordre

$$(n - 4 + r)\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right\}$$

Cette série serait complète pour des valeurs suffisantes de r, si D n'avait pas de points singuliers. Mais nous lui avons supposé le nombre d de points triples, et d'après le théorème de M. Castelnuovo chacun de ces points diminue la dimension de la série de deux unités[2]. Si nous désignons par ρ le genre de D, nous aurons comme dimension de la série:

[1] Castelnuovo: Sui multipli di una seria lineare di punti. Rend. di Palermo. T. VII, 1893.

[2] Nous supposons ici que les trois tangentes passant par le point triple de la courbe double ne sont pas situées dans un même plan. Au cas où elles le seraient, la dimension serait diminuée de 3 unités.

$$R_2 = (n-4+r)\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\pi\right\}-\rho-2d.$$

Une surface d'ordre $n-4+r$ ayant R_2+1 points en commun avec D contient la courbe D tout entière, et si elle est assujettie à passer ultérieurement par R_1+1 points situés sur F', elle se trouvera composée de cette même surface F' et d'une autre d'ordre $r-4$. Nous obtenons ainsi l'équation suivante:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{6}(n-1+r)\,(n-2+r)\,(n-3+r)\\ &= (R_1+1)+(R_2+1)+\tfrac{1}{6}(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\end{aligned}$$

et en effectuant le calcul:

$$\rho+2d = \tfrac{1}{6}(2n^3-15n^2+25n+12)-(n-4)(\pi-1)+p_a. \quad (12)$$

Le fait que r a disparu dans cette équation nous assure que M. Enriques a été bien fondé en énonçant que p_a ne dépend pas de r dans les cas où r est suffisamment grand.

ρ se détermine à l'aide de la formule de correspondance de Zeuthen, puisqu'il il y a une correspondance (1, 2) entre D et K. Nous avons donc:

$$2(P-3d-1) = 4(\rho-1)+\iota \quad (13)$$

où
$$P-1 = (n-4)\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\pi\right\}$$

et
$$\iota = (2n-5)+8(\pi-1)+(\omega-I).$$

Les quatre grandeurs ρ, d, P et ι ne pouvant s'éliminer que s'il est possible d'établir entre elles une cinquième équation, nous allons obtenir cette équation par le raisonnement suivant:

Les intersections de K (ou $2D$) et d'une courbe jacobienne C_j sont, outre les ι points pinces, les α points situés sur K qui sont points doubles de courbes appartenant au réseau qui correspond à C_j. En d'autres termes: α représente la classe de la surface développable qu'enveloppent les plans tangents à F' le long de D. On a par conséquent d'abord:

$$\iota + \alpha = (C_j, K) = (3C + \theta, ((n-4)\ C - \theta)),$$
$$\iota + \alpha = 2n^2 - 5n + 1 + (2n - 14)(\pi - 1) - \omega, \tag{14}$$

et ensuite, puisque la seconde polaire (par rapport à F) du sommet O du réseau de plans coupe la courbe double en les α points susdits et aussi en d points triples,

$$\alpha + 3d = (n-2)\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right\} \tag{15}$$

ce qui nous donne justement après élimination de ι, α, ρ, P et d entre (12), (13), (7), (8), (14) et (15):

$$\omega + I = 12p_a + 9.$$

Il résulte de cette équation que p_a est un invariant absolu, ω et I étant des invariants relatifs qui diminuent ou augmentent, respectivement, d'une unité toutes les fois que la transformation entraîne l'introduction d'une courbe exceptionnelle.

Des équations ci-dessus on obtient les suivantes:

$$d = \tfrac{1}{6}(n^3 - 9n^2 + 20n - 30) - (n-8)(\pi - 1) - 4p_a + \omega \tag{16}$$
$$P - 3d = n^2 - 14n + 16 + (2n - 20)(\pi - 1) + 12p_a - 3\omega \tag{17}$$
$$\rho = \tfrac{1}{2}(n^2 - 5n + 24) + (n - 12)(\pi - 1) + 9p_a - 2\omega \tag{18}$$

Le nombre des courbes C à trois points doubles contenues dans $C^{(3)}$ peut se calculer en appliquant (16) à la série $C_j^{(3)}$; on remplacera n par d et π par le genre de C_j, qui est $9(\pi-1) + (\omega - 1)$.

8. Les formules que nous avons établies dans ce qui précède se rapportent à toute série de courbes triplement infinies sur une surface algébrique; cependant nous nous sommes servis, pour la dérivation de quelques-unes de ces formules, du système spécial aux sections planes d'une surface dans l'espace à trois dimensions; mais alors la signification projective des singularités en question est quelquefois assez compliquée: K sera la courbe double de la surface; ι, le nombre de ses points pinces; ε, la classe de la courbe enveloppée par les plans tangents stationnaires. Il peut donc y avoir quelque

intérêt à remarquer que pour une surface dans l'espace à quatre dimensions la signification projective des singularités sera plus simple.

Soit F une surface dans un espace à quatre dimensions, et soit $C^{(3)}$ un système de sections hyperplanes qui passent par un point fixe O également situé dans cet espace.

d sera alors le nombre des plans tangents à F qui coupent un plan donné (passant par O) suivant une droite; ou le nombre des hyperplans tangents qui contiennent le plan donné.

ε sera le nombre des plans tangents à F qui contiennent une droite donnée (passant par O); ou le nombre des hyperplans osculateurs où la droite donnée se trouve contenue.

ι: le nombre des plans tangents à F qui passent par un point donné, O.

C_j: le lieu géométrique des points de contact des plans tangents à F qui coupent une droite donnée.

C_p: le lieu géométrique des hyperplans osculateurs passant par O.

C_d: le lieu géométrique des points de contact des plans à double contact qui passent par O.

K: le lieu des intersections de F par les sécantes doubles passant par O. Parmi ces sécantes il y a ι tangentes et d sécantes qui coupent F en trois points.

Bologne. Mai 1905.